

IL RANGO

A matrice di ordine $m \times n$



Si definisce **rango per riga** di A
il massimo numero di righe di A
linearmente indipendenti

$r(A)$

IL RANGO

A matrice di ordine $m \times n$



Si definisce **rango per colonna** di A
il massimo numero di colonne di A
linearmente indipendenti

$c(A)$

IL RANGO

A matrice di ordine $m \times n$



Teorema fondamentale del rango:

$$\underbrace{k(A) = r(A) = c(A)}_{\parallel} \boxed{r(A)}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$



$$0 \leq \mathbf{r}(\mathbf{A}) \leq \min\{m, n\}$$



$$0 \leq \mathbf{r}(\mathbf{A}) \leq \min\{2, 3\}$$



$$0 \leq \mathbf{r}(\mathbf{A}) \leq 2$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$0 < r(\mathbf{A}) \leq 2$$



$$\mathbf{A}' = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$$

è un minore di ordine 2 non nullo



$$r(\mathbf{A}) = 2$$

Non esistono in $\mathbf{A}$ minori di ordine superiore al 2!!!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$



$$0 \leq \mathbf{r}(\mathbf{A}) \leq \min\{m, n\}$$



$$0 \leq \mathbf{r}(\mathbf{A}) \leq \min\{3, 3\}$$



$$0 \leq \mathbf{r}(\mathbf{A}) \leq 3$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{A}' = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 4 + 3 - 8 - 1 + 6 = 0$$

è l'unico minore di ordine 3



$$\mathbf{r}(\mathbf{A}) \neq 3$$



$$0 < \mathbf{r}(\mathbf{A}) < 3$$



$$0 < r(A) \stackrel{?}{=} 2$$

$$A' = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0$$



$$r(A) = 2$$

In A tutti i minori di ordine superiore al 2 sono nulli!!!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 5 \\ 6 & -2 & 4 & 3 \\ -2 & 6 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$



$$0 \leq \mathbf{r}(\mathbf{A}) \leq \min\{m, n\}$$



$$0 \leq \mathbf{r}(\mathbf{A}) \leq \min\{3, 4\}$$



$$0 \leq \mathbf{r}(\mathbf{A}) \leq 3$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 5 \\ 6 & -2 & 4 & 3 \\ -2 & 6 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{A}' = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 3 \\ 6 & 4 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

$$\mathbf{A}'' = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 6 & 4 & 3 \\ -2 & 4 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

$$\mathbf{A}''' = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 6 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

$$\mathbf{A}^{\text{IV}} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 6 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

sono tutti i minori di ordine 3 estraibili da $\mathbf{A}$

sono tutti nulli!!!



$$r(A) \neq 3$$



$$0 < r(A) < 3$$



$$0 < r(A) \stackrel{?}{=} 2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 18 = -16 \neq 0 \quad \longrightarrow \quad r(A) = 2$$

IL RANGO

$$r(A) = p$$



- in A esiste un minore di ordine p non nullo
- in A ogni minore di ordine superiore a p è nullo



$$0 \leq r(A) \leq \min\{m, n\}$$

I MINORI ORLATI

A matrice di ordine $m \times n$

A' minore di ordine p



Si definisce **minore orlato** di A'

un qualsiasi minore di A ,

di ordine $p+1$, ottenuto da A'

aggiungendo una riga ed una colonna

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}$$



$$A' = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

è un minore di ordine 2 estraibile da A non nullo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$



$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & 5 & -7 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

sono tutti i minori orlati del terzo ordine di A'

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -4 \\ -1 & 5 & 2 & 3 \\ -2 & -7 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{A}' = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 5 & 2 & 3 \\ -7 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

**è un minore di ordine 3
estraibile da $\mathbf{A}$**



$$\mathbf{A}'' = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -4 \\ -1 & 5 & 2 & 3 \\ -2 & -7 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

**è l'unico minore di ordine 4
estraibile da $\mathbf{A}$**

IL RANGO:

IL TEOREMA DI KRONECKER

O

DEGLI ORLATI

A matrice di ordine $m \times n$



$$r(A) = r$$



- esiste un minore A' , di ordine r , non nullo
- tutti i minori orlati di A' (se esistono) sono nulli

CALCOLO DEL RANGO

A matrice di ordine $m \times n$

$$p = \min\{m, n\}$$

Primo metodo

minori di ordine p

1) esiste un minore di ordine p non nullo



$$r(A) = p$$

tutti i minori di ordine p sono nulli



minori di ordine $p-1$

2) esiste un minore di ordine $p-1$ non nullo



$$r(A) = p-1$$

tutti i minori di ordine $p-1$ sono nulli



minori di ordine $p-2$

3)

.....

Secondo metodo

- 1) trovare un minore A' di ordine p non nullo
(generalmente $p = 2$)



$$r(A) \geq p = 2$$



minori orlati di A'

2) tutti i minori orlati di A' sono nulli



$$r(A) = p$$

un minore orlato di A' è diverso da zero:
ad esempio A''



minori orlati di A''

3)

.....

Esempio 1

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{p} = \min\{m, n\} = \min\{3, 3\} = 3$$



$$0 \leq \mathbf{r}(\mathbf{A}) \leq 3$$

Primo metodo

minori di ordine $p = 3$

1) esiste un minore di ordine 3 non nullo?

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{è l'unico minore di ordine 3} \\ \text{estraibile da } A$$



minore di ordine 3 nullo

$$r(A) \neq 3$$



$$0 \leq r(A) < 3$$

minori di ordine $p-1 = 2$

2) esiste un minore di ordine 2 non nullo?

$$A' = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$$



$$r(A) = 2$$

Secondo metodo

- 1) trovare un minore A' di ordine p non nullo
(generalmente $p = 2$)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$



$$A' = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$$

è uno dei minori di A
di ordine 2 non nullo



$$r(A) \geq 2$$



minori orlati di A'

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{è l'unico minore orlato di } A' \text{ di ordine 3}$$



$$r(A) = 2$$

Esempio 2

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ -1 & 6 & 2 & 3 \\ 3 & -8 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{p} = \min\{m, n\} = \min\{4, 4\} = 4$$



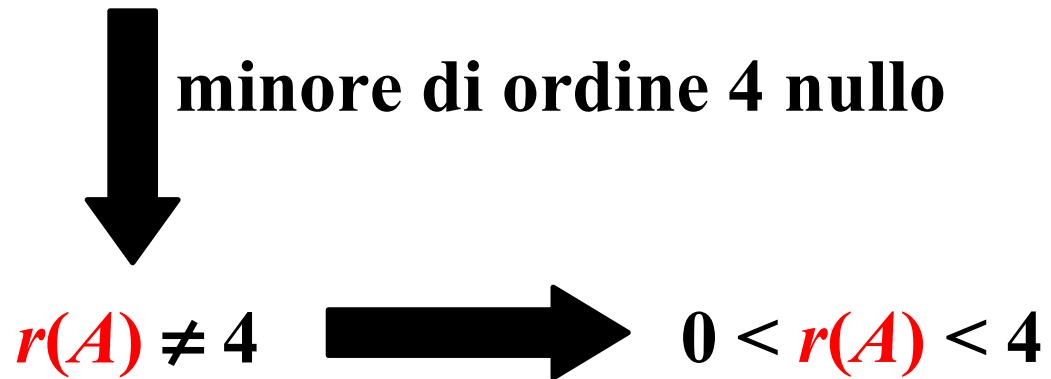
$$0 \leq \mathbf{r}(\mathbf{A}) \leq 4 \longrightarrow 0 < \mathbf{r}(\mathbf{A}) \leq 4$$

Primo metodo

minori di ordine $p = 4$

1) esiste un minore di ordine 4 non nullo?

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ -1 & 6 & 2 & 3 \\ 3 & -8 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{è l'unico minore di ordine 4} \\ \text{estraibile da } A$$



minori di ordine $p-1 = 3$

2) esiste un minore di ordine 3 non nullo?

$$A' = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 6 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$$



$$r(A) = 3$$

Secondo metodo

- 1) trovare un minore A' di ordine p non nullo
(generalmente $p = 2$)

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{6} & 5 & 1 \\ \boxed{1} & \boxed{4} & 3 & 2 \\ -1 & 6 & 2 & 3 \\ 3 & -8 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$



$$A' = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$$

è uno dei minori di A
di ordine 2 non nullo



$$r(A) \geq 2$$



minori orlati di A'

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \\ -1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad A'' = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -20 \neq 0$$



ne esiste uno non nullo

$$r(A) \neq 2$$



$$r(A) \geq 3$$



minori orlati di A''

$$A''' = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ -1 & 6 & 2 & 3 \\ 3 & -8 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$



**tutti i minori orlati del
quarto ordine sono nulli**

$$r(A) = 3$$